16 septembre 2025

Corrigé 1

Exercice 1. On considère $\mathbb{N}$ muni de la loi de composition suivante : $x * y = \max(x, y)$ pour $x, y \in \mathbb{N}$. (Ici, "max" veut dire le maximum des deux et $\max(x, x) = x$.) Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

a) Cette loi de composition est associative.

b) Cette loi de composition n'est pas commutative.

c) L'élément 0 est l'élément neutre.

d) Aucun élément n'admet d'inverse.

Solution 1.

a) Oui. En effet, soient $x, y, z \in \mathbb{N}$. Alors

$$(x * y) * z = \max(x * y, z) = \max(\max(x, y), z) = \max(x, y, z)\,,$$

$$x * (y * z) = \max(x, y * z) = \max(x, \max(y, z)) = \max(x, y, z)\,.$$

b) Non. Cette loi de composition est commutative, car si $x, y \in \mathbb{N}$, alors $x * y = \max(x, y) = \max(y, x) = y * x$.

c) Oui. En effet, pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $x \geq 0$ et donc $0 * x = \max(0, x) = x = \max(x, 0) = x * 0$.

d) Non. L'élément 0 admet un inverse qui est lui-même, puisque $0 * 0 = \max(0, 0) = 0$. Mais 0 est le seul élément qui admet un inverse, car sinon, pour $x \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que $x * y = 0 = y * x$, alors $0 = \max(x, y)$ et donc $x = y = 0$, puisque $x, y \geq 0$.

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils stables pour la multiplication usuelle ? Justifier votre réponse.

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists\, k, l \in \mathbb{Z} \quad \text{tels que} \quad n = k^2 - l^2\}$.

b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 4k + 2, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

c) $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 4k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

Solution 2.

a) Si $n_1 = k_1^2 - l_1^2$ et $n_2 = k_2^2 - l_2^2$, alors

$$n_1 n_2 = (k_1 k_2)^2 - (l_1 k_2)^2 - (l_2 k_1)^2 + (l_1 l_2)^2 = (k_1 k_2 + l_1 l_2)^2 - (l_1 k_2 + l_2 k_1)^2$$

donc A est stable pour la multiplication usuelle.

b) Si $n_1 = 4k_1 + 2$ et $n_2 = 4k_2 + 2$, alors $n_1 n_2 = 4(4k_1 k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1)$, donc multiple de 4. L'ensemble B n'est pas stable pour la multiplication usuelle.

c) Si $n_1 = 4k_1 + 1$ et $n_2 = 4k_2 + 1$, alors $n_1 n_2 = 4(4k_1 k_2 + k_1 + k_2) + 1$, donc C est stable pour la multiplication usuelle.

Exercice 3. Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Montrer que $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ et que $\sigma\rho = \rho\sigma$.

Solution 3. On calcule $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, aussi $\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \rho\sigma$.

Exercice 4. Soit $\diamond$ la loi de composition sur $\mathbb{R}$ définie par $x \diamond y = xy - x - y + 2$.

Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, \diamond)$ est un groupe commutatif.

Solution 4. Tout d'abord on montre que la loi est bien définie dans le sens que pour $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$ on a $x \diamond y \in \mathbb{R} - \{1\}$.

C'est clair que $xy - x - y + 2 \in \mathbb{R}$. Si $xy - x - y + 2 = 1$ alors $xy - x - y = -1$ et $x(y-1) = y - 1$. Si $y \neq 1$ on déduit que $x = 1$. Donc pour tout $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a $x \diamond y \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}$. Alors

$$\begin{aligned} (x \diamond y) \diamond z &= (xy - x - y + 2) \diamond z \\ &= (xy - x - y + 2)z - (xy - x - y + 2) - z + 2 \\ &= xyz - xy - yz - xz + x + y + z \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x \diamond (y \diamond z) &= x \diamond (yz - y - z + 2) \\ &= x(yz - y - z + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2 \\ &= xyz - xy - yz - xz + x + y + z. \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}$ et la loi de composition $\diamond$ est donc associative.

La loi de composition $\diamond$ est commutative. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$. Alors

$$x \diamond y = xy - x - y + 2 = yx - y - x + 2 = y \diamond x.$$

L'élément 2 est l'élément neutre de la loi de composition $\diamond$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $2 \diamond x = 2x - 2 - x + 2 = x$ et donc aussi $x \diamond 2 = x$ par commutativité de $\diamond$.

Tout élément $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ admet un inverse. En effet, comme $x \neq 1$, $\frac{x}{x-1}$ existe. Alors

$$\frac{x}{x-1} \diamond x = \frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - x + 2 = \frac{x^2 - x - x(x-1)}{x-1} + 2 = 2$$

et donc aussi $x \diamond \frac{x}{x-1} = 2$ par commutativité de $\diamond$. De plus, $\frac{x}{x-1} \neq 1$ (car sinon $x = x - 1$ donc $0 = -1$, ce qui est impossible), et ainsi $\frac{x}{x-1} \in \mathbb{R} - \{1\}$. On obtient donc que l'inverse de x, pour la loi de composition $\diamond$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$, est $\frac{x}{x-1}$.

En combinant les preuves ci-dessus, on a montré que $(\mathbb{R} - \{1\}, \diamond)$ est un groupe commutatif.

Exercice 5. Soient $(G,*)$ un groupe et $g_1,\dots,g_n \in G$, avec inverses respectifs $g_1^{-1},\dots,g_n^{-1}$. Montrer que l'inverse de $g_1 * \cdots * g_n$ est égal à $(g_n^{-1} * \cdots * g_1^{-1})$.

Solution 5. On a

$$(g_1 * \cdots * g_n) * (g_n^{-1} * \cdots * g_1^{-1}) = g_1 * \cdots * (g_n * g_n^{-1}) * \cdots * g_1^{-1} = g_1 * \cdots * (g_{n-1} * g_{n-1}^{-1}) * \cdots * g_1^{-1},$$

et on continue ainsi pour obtenir l'élément neutre de G. C'est aussi vrai pour $(g_n^{-1} * \cdots * g_1^{-1}) * (g_1 * \cdots * g_n)$.

Exercice 6. Soit $(G,*)$ un groupe. Fixons $a \in G$ et définissons l'application $T_a : G \to G$ (une translation) par $T_a(g) = a * g$, pour tout $g \in G$. Montrer que T_a est une application bijective, c'est-à-dire surjective et injective.

Solution 6. On montre d'abord que T_a est injective; supposons $T_a(x) = T_a(y)$ pour $x, y \in G$. On a alors $a * x = a * y$ et en multipliant à gauche par a^{-1}, l'inverse de a, on obtient

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y) \Longrightarrow (a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y$$

$$\Longrightarrow e * x = e * y \Longrightarrow x = y.$$

Donc T_a est injective.

Maintenant montrons que T_a est surjective. Soit $g \in G$. On note que $a^{-1} * g \in G$ et $T_a(a^{-1} * g) = a * (a^{-1} * g) = (a * a^{-1}) * g = e * g = g$. Donc T_a est surjective.

Exercice 7. Soient $(G_1,*)$ et $(G_2,\circ)$ des groupes. On munit le produit cartésien $G_1 \times G_2$ d'une loi de composition $\cdot$ comme suit

$$\cdot : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2, \quad (a,b) \cdot (c,d) = (a * c, b \circ d), \text{ pour } a, c \in G_1, b, d \in G_2.$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \cdot)$ est un groupe.

Solution 7. La loi $\cdot$ est bien une loi de composition sur $G_1 \times G_2$, car pour $a, b \in G_1$, $x, y \in G_2$, on a $a * b \in G_1$ et $x \circ y \in G_2$. Pour $a, b, c \in G_1, x, y, z \in G_2$,

$$\begin{aligned}(a,x) \cdot ((b,y) \cdot (c,z)) &= (a,x) \cdot (b * c, y \circ z) \\ &= (a * (b * c), x \circ (y \circ z)) \\ &= ((a * b) * c, (x \circ y) \circ z) \\ &= (a * b, x \circ y) \cdot (c,z) \\ &= ((a,x) \cdot (b,y)) \cdot (c,z).\end{aligned}$$

La troisième égalité est vérifiée car $*$ et $\circ$ sont des lois associatives. La loi $\cdot$ est donc associative.

Ensuite si e_i est l'élément neutre de G_i pour $i = 1, 2$, on vérifie que pour tout $x_i \in G_i$, $i = 1, 2$, on a $(e_1, e_2) \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2) = (x_1, x_2) \cdot (e_1, e_2)$ et (e_1, e_2) est un élément neutre dans $G_1 \times G_2$.

Enfin, pour x_i comme ci-dessus, soit x_i^{-1} l'inverse de x_i dans G_i. Donc $(x_1^{-1}, x_2^{-1}) \cdot (x_1, x_2) = (x_1^{-1} * x_1, x_2^{-1} \circ x_2) = (e_1, e_2)$, ce qui montre l'existence des inverses à gauche, et de façon similaire (x_1^{-1}, x_2^{-1}) est l'inverse à droite de (x_1, x_2).

Exercice 8. On note $(\mathbb{R}, +)$ le groupe des nombres réels avec l'addition usuelle. On considère $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ muni de la multiplication usuelle, qui est un groupe noté $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

a) On désigne par $\mathbb{R}_{>0}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Montrer que $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

b) On définit une application $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ qui envoie $x \in \mathbb{R}$ vers $\exp(x)$. Montrer que c'est un homomorphisme de groupes. Déterminer son noyau et son image.

Solution 8.

a) Premièrement, il est évident que $\mathbb{R}_{>0} \neq \emptyset$; deuxièment, si $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, alors $x \cdot y \in \mathbb{R}_{>0}$; troisièmement, pour $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_{>0}$. Donc $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

b) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, c'est-à-dire que $\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$. L'application $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ est donc un homomorphisme de groupes.

   Si pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \exp(x) = 1$, alors $x = 0$. Donc le noyau de φ est réduit à l'élément neutre. L'image de φ est $\mathbb{R}_{>0}$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \exp(x) > 0$ et pour tout $y > 0$, $\varphi(\log(y)) = \exp(\log(y)) = y$ (où log est le logarithme naturel, souvent noté ln).

Facultatifs

Exercice 9. Soit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers modulo 6. Pour $a \in \mathbb{Z}$ on notera par $\bar{a} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ la classe d'équivalence de a modulo 6. On définit une loi de composition $*$ sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ par $\bar{a} * \bar{b} = \overline{ab}$, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$[1].

(a) Déterminer si $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, *)$ est un groupe.

(b) Trouver toutes les solutions de l'équation $x * x + x = \bar{0}$ pour $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Solution 9.

(a) Il existe un élément neutre pour $*$, notamment $\bar{1}$. Mais les éléments $\bar{0}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ ne possèdent pas d'élément inverse par rapport à la loi $*$. Donc $*$ ne munit pas l'ensemble $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe.

(b) On teste les 6 éléments $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{5}$ de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et on trouve que $\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}$ satisfont à l'égalité et que $\bar{1}$ et $\bar{4}$ ne la satisfont pas.

Exercice 10. [2] Soit S^1 le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$, c.-à-d.

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

On définit la loi de composition $*$ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

[1] Ici ab est le produit usuel de a et b dans $\mathbb{Z}$, et on admet que la loi de composition $*$ est bien définie et associative.

[2] Cet exercice est recommandé si vous souhaitez encore vous entraîner à vérifier les axiomes de groupe.

a) Montrer que ceci définit une loi de composition associative et commutative sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que S^1 est stable pour $*$.

c) Trouver des expressions pour l'élément neutre, et pour l'inverse d'un élément quelconque $(a,b) \in S^1$.

d) Montrer que $(S^1, *)$ est un groupe. Est-il commutatif?

Solution 10.

a) Soient $(a,b), (c,d), (d,e) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}((a,b)*(c,d))*(e,f) &= (ac-bd,\ ad+bc)*(e,f) \\ &= (ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce) \\ &= (ace-adf-bcf-bde,\ acf+ade+bce-bdf) \\ &= (a,b)*(ce-df,\ cf+de) \\ &= (a,b)*((c,d)*(e,f)).\end{aligned}$$

La loi de composition $*$ est donc associative.

Soient $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$. Alors $(a,b)*(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc) = (c,d)*(a,b)$. La loi de composition $*$ est donc commutative.

b) Soient $(a,b), (c,d) \in S^1$. Alors $a^2+b^2 = 1 = c^2+d^2$. On a

$$\begin{aligned}(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 &= (a^2c^2-2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2+2abcd+b^2c^2) \\ &= a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc $(a,b)*(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc) \in S^1$. Par conséquent, S^1 est stable pour $*$.

c) L'élément $(1,0) \in S^1$ est l'élément neutre de S^1. En effet, pour tout $(a,b) \in S^1$,

$$(1,0)*(a,b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a,b),$$

et donc aussi $(a,b)*(1,0) = (a,b)$ par commutativité de $*$.

Soient $(a,b), (c,d) \in S^1$ tels que $(a,b)*(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc) = (1,0)$. On doit résoudre le système d'équations:

$$ac-bd = 1 \tag{1}$$
$$ad+bc = 0 \tag{2}$$

On multiplie la première équation par b et la deuxième par a pour obtenir deux nouvelles égalités (mais un système qui n'est pas nécessairement équivalent au système de départ):

$$abc-b^2d = b \tag{3}$$
$$a^2d+abc = 0 \tag{4}$$

En faisant la différence des deux équations on trouve $a^2d+b^2d = -b$. Comme $a^2+b^2 = 1$, on trouve $d = -b$ et ensuite on substitue pour trouver que $a(-b)+bc = 0$. On déduit que soit $b = 0$ soit $a = c$. Si $b = 0$, alors $a = \pm 1$, $d = 0$ et $c = a$.

Ainsi, dans tous les cas, l'inverse de (a,b) est $(a,-b)$.

d) Observons qu'avec a), b) et c), on a montré que $(S^1, *)$ est un groupe. C'est un groupe commutatif, car d'après a), la loi de composition $*$ est commutative.

Exercice 11. Soient G un groupe et H, K des sous-groupes de G. Démontrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

Solution 11. Il est clair que si $H \subseteq K$ alors $H \cup K = K$ est un sous-groupe.

Supposons maintenant que $H \cup K$ est un sous-groupe et que H n'est pas inclus dans K. On montre que K est inclus dans H.

Soit $h \in H \setminus K$. Soit $x \in K$. Comme $x, h \in H \cup K$ et que ce dernier est un sous-groupe, on a $hx \in H \cup K$. On note que $hx \notin K$ car sinon $(hx)x^{-1} = h \in K$ ce qui contredit notre choix de h. Donc $hx \in H$. Mais maintenant $h^{-1}(hx) \in H$ aussi car H est un sous-groupe et donc $x \in H$. Comme $x \in K$ est arbitraire, on a montré que $K \subseteq H$.

Exercice 12. Soit G un groupe et posons $E = \{H \subseteq G \mid H \text{ est un sous-groupe de } G\}$. On définit une relation sur E comme suit :

pour $H_1, H_2 \in E$, on dit que $H_1 \sim H_2$ si H_1 est un sous-groupe de H_2. Montrer que $\sim$ est une relation réflexive et transitive.

Solution 12. Pour tout $H \in E$, on a que H est un sous-groupe de lui-même. La relation est reflexive. Soient maintenant $H_i \in E$ pour $i = 1, 2, 3$. On suppose que H_1 est un sous-groupe de H_2 et que H_2 est un sous-groupe de H_3. Alors, on a $H_1 \subseteq H_2 \subseteq H_3 \subseteq G$ en tant qu'ensembles et donc $H_1 \subseteq H_3$. De plus, comme H_1 est un sous-groupe de H_2, il est non-vide, stable par multiplication et stable par inversion et ces propriétés ne dépendent pas du groupe dont il est sous-groupe. Ainsi, H_1 est bien un sous-groupe de H_3.